

# SCHEMAT PUNKTOWANIA

## Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki dla uczniów gimnazjów

Rok szkolny 2012/2013

### Etap szkolny

Przy punktowaniu zadań otwartych należy stosować następujące ogólne reguły:

- Oceniamy rozwiązania zadań zgodnie z podanym niżej schematem, tzn. przyznajemy daną liczbę punktów, jeżeli rozwiązanie zawiera wszystkie wskazane na danym poziomie elementy.
- Punktując rozwiązania zadań przyznajemy tylko całkowitą liczbę punktów.
- Nie jest wymagana pisemna odpowiedź, ale jednoznaczne wskazanie wyniku lub rozstrzygnięcia problemu.
- Za każdy inny niż podany w kluczu, poprawny sposób rozwiązania zadania przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
- W przypadku, gdy zadanie rozwiązywano innym sposobem, niż podany w kluczu, ale popełnione zostały błędy lub nie dokończono rozwiązywania, należy przyznać proporcjonalnie mniej punktów, niż wynosi ich maksymalna liczba dla tego zadania.
- Do następnego etapu zostają zakwalifikowani uczniowie, którzy uzyskali 80% lub więcej punktów możliwych do zdobycia, tzn. 48 punktów lub więcej.

#### Zadanie 1.

Za każde hasło poprawnie zapisane w krzyżówce 1 punkt, czyli w sumie 20 punktów.

						1	S	I	E	C	Z	N	A								
2	P	I	T	A	G	O	R	A	S												
			3	M	E	D	I	A	N	A											
					4	S	T	O													
					5	Ś	R	O	D	K	O	W	Y								
6	P	R	Z	E	C	I	W	P	R	O	S	T	O	K	Ą	T	N	A			
						7	C	Z	T	E	R	Y									
						8	S	F	E	R	A										
					9	J	E	D	E	N											
						10	H	E	K	T	A	R									
			11	P	I	E	R	W	S	Z	A										
12	Ś	R	E	D	N	I	A			A	R	Y	T	M	E	T	Y	C	Z	N	A
						13	P	R	Z	E	K	Ą	T	N	A						
						14	O	Ś		L	I	C	Z	B	O	W	A				
						15	P	R	O	C	E	N	T								
						16	W	Y	K	R	E	S									
						17	R	O	M	B											
						18	S	Y	M	E	T	R	A	L	N	E/A					
19	W	Y	K	Ł	A	D	N	I	K												
						20	S	T	Y	C	Z	N	A								

## Zadania zamknięte

Zadanie	2	3	4	5	6	7	8	9
Odpowiedź I	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ	FAŁSZ	FAŁSZ	FAŁSZ	FAŁSZ
Odpowiedź II	FAŁSZ	FAŁSZ	FAŁSZ	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA
Odpowiedź III	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA

## Zadania otwarte

### Przykładowe rozwiązania:

#### Zadanie 10.

$x$  – wiek Diofantosa w chwili śmierci

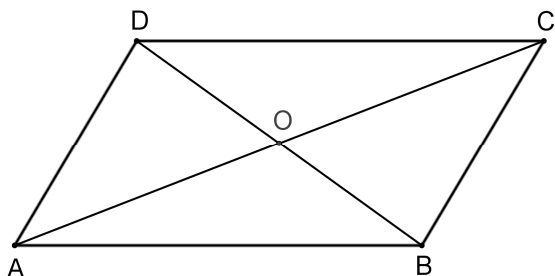
$\frac{1}{2}x$  – wiek syna Diofantosa w chwili śmierci

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

$$x = 84$$

Odp. Diofantos w chwili śmierci miał 84 lata.

#### Zadanie 11.



Miary kątów  $OAB$  i  $OCD$  są równe (kąty naprzemianległe).

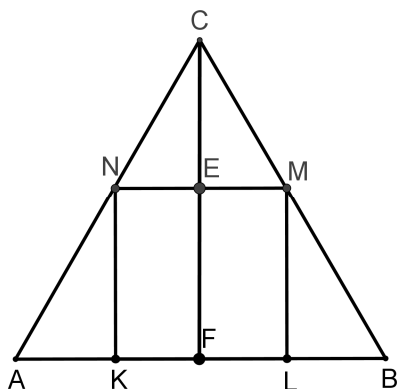
Miary kątów  $OBA$  i  $ODC$  są równe (kąty naprzemianległe).

Boki  $AB$  i  $CD$  są równej długości (z definicji równoległoboku).

Trójkąty  $ABO$  i  $CDO$  są przystające (cecha przystawania kbk).

Odcinki  $DO$  i  $BO$  są równej długości oraz odcinki  $AO$  i  $CO$  są równej długości (własność trójkątów przystających  $ABO$  i  $CDO$ ).

### Zadanie 12.



Odcinek  $CF$  jest wysokością trójkąta równobocznego, zatem  $h = |CF| = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ .

Długość boku kwadratu oznaczmy przez  $x$ .

Trójkąty  $CFB$  i  $CEM$  są podobne, więc otrzymujemy proporcję:

$$\frac{CF}{FB} = \frac{CE}{EM}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{5} = \frac{5\sqrt{3} - x}{\frac{1}{2}x}$$

$$x = 20\sqrt{3} - 30$$

Pole kwadratu wynosi:  $x^2 = (20\sqrt{3} - 30)^2 = 2100 - 1200\sqrt{3}$  [cm<sup>2</sup>]

### Zadanie 13.

Suma  $123^{123} + 67^{67}$  jest podzielna przez 10, jeżeli ostatnią cyfrą tej liczby jest 0.

Ostatnie cyfry kolejnych potęg liczby 123, to **3, 9, 7, 1**, 3, 9, 7, 1, ... .

Ostatnie cyfry kolejnych potęg liczby 67, to **7, 9, 3, 1**, 7, 9, 3, 1, ... .

W obu przypadkach powtarza się **ciąg czterech cyfr**, zatem: ostatnią cyfrą potęgi  $123^{123}$  jest 7 ( $123 : 4 = 30 r. 3$ ), a ostatnią cyfrą potęgi  $67^{67}$  jest 3 ( $67 : 4 = 16 r. 3$ ).

Suma potęg kończy się więc cyfrą 0 ( $7 + 3 = 10$ ), co dowodzi podzielności tej sumy przez 10.

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
10	<b>Poziom 6:</b> pełne rozwiązanie	<i>Poprawne obliczenie wieku Diofantosa (84 lata).</i>	3 p.
	<b>Poziom 4:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne	<i>Ułożenie poprawnego równania: <math>\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x</math> bez rozwiązania lub z rozwiązaniem błędnym.</i>	2 p.
	<b>Poziom 2:</b> dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane	<i>Analiza zadania bez ułożenia równania, np. <math>x</math> – wiek Diofantosa, <math>\frac{1}{6}x</math> -okres dzieciństwa, <math>\frac{1}{12}x</math> - okres młodzieńczy, <math>\frac{1}{7}x</math> - okres kawalerski, <math>\frac{1}{2}x</math> - długość życia syna.</i>	1 p.
	<b>Poziom 0:</b> rozwiązanie niestanowiące postępu.	<i>Rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania.</i>	0 p.
11	<b>Poziom 6:</b> pełne rozwiązanie	<i>Pełne uzasadnienie faktu połowienia przekątnych (wskazanie, że z faktu przystawiania trójkątów wynika równość odpowiednich boków trójkąta – połówek przekątnych).</i>	3p.
	<b>Poziom 4:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne	<i>Pełne uzasadnienie przystawiania jednej z par trójkątów, bez wniosku końcowego o przekątne (wskazanie pary boków równych i równoległych oraz odpowiednich par równych kątów naprzemianległych).</i>	2 p.
	<b>Poziom 2:</b> dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane	<i>Zauważenie przystawiania jednej z par trójkątów: AOB i COD albo ADO i BCO bez uzasadnienia albo z niepełnym uzasadnieniem.</i>	1 p.
	<b>Poziom 0:</b> rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania	<i>Rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania.</i>	0 p.
12	<b>Poziom 6:</b> pełne rozwiązanie.	<i>Prawidłowe obliczenie pola kwadratu <math>x^2 = (20\sqrt{3} - 30)^2 = 2100 - 1200\sqrt{3}cm^2</math></i>	5 p.
	<b>Poziom 5:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)	<i>Prawidłowe obliczenie długości boku kwadratu (<math>x = 20\sqrt{3} - 30</math>), ale brak obliczenia pola kwadratu albo obliczenie błędne.</i>	4 p.

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
12 cd.	<b>Poziom 4:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne	Zapisanie prawidłowej proporcji w postaci równania pozwalającego obliczyć długość boku kwadratu, np.: $\frac{5\sqrt{3}}{5} = \frac{5\sqrt{3} - x}{\frac{1}{2}x}$ ,  ale brak rozwiązania równania albo rozwiązanie błędne.	3 p.
	<b>Poziom 3:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane, ale w trakcie ich pokonywania popełniono błędy	Wskazanie trójkątów podobnych (np. CFB i CEM) i zapisanie poprawnej proporcji odpowiednich odcinków w trójkątach podobnych, np.: $\frac{CF}{FB} = \frac{CE}{EM}$ .	2 p.
	<b>Poziom 2:</b> dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane	Podanie wysokości trójkąta $h = 5\sqrt{3}$	1 p.
	<b>Poziom 0:</b> rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania	Rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania.	0 p.
13	<b>Poziom 6:</b> pełne rozwiązanie.	Podanie pełnego uzasadnienia podzielności sumy $123^{123} + 67^{67}$ przez 10.	5 p.
	<b>Poziom 5:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)	Wskazanie, z uzasadnieniem, ostatnich cyfr obu składników sumy (liczba $123^{123}$ kończy się cyfrą 7, bo $123 : 4 = 30$ r. 3 ; liczba $67^{67}$ kończy się cyfrą 3, bo $67 : 4 = 16$ r. 3 ) albo wskazanie cyfr bez uzasadnienia, ale z wnioskiem dotyczącym ich sumy ( $3 + 7 = 10$ , zatem ostatnią cyfrą sumy $123^{123} + 67^{67}$ jest 0 i liczba jest podzielna przez 10).	4 p.
	<b>Poziom 4:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Wskazanie, dla obu składników sumy, ostatnich cyfr kolejnych potęg: (kolejne potęgi liczby 123 kończą się na {3, 9, 7, 1, 3, ...} oraz kolejne potęgi liczby 67 kończą się na {7, 9, 3, 1, 7, ...}).	3 p.
	<b>Poziom 2:</b> dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Wskazanie, dla co najmniej jednego składnika sumy, ostatnich cyfr kolejnych potęg: (kolejne potęgi liczby 123 kończą się na {3, 9, 7, 1, 3, ...} lub kolejne potęgi liczby 67 kończą się na {7, 9, 3, 1, 7, ...}).	2 p.
	<b>Poziom 1:</b> dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania.	Wskazanie cechy podzielności przez 10 (ostatnia cyfra liczby to 0).	1 p.
	<b>Poziom 0:</b> rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.	Rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania.	0 p.